Conservación de la Energía

Rodolfo Figueroa Soriano

Problema

Dos esferas, una de acero, de masa m, y otra de plomo, de masa $m/4$, están suspendidas de hilos sujetos a un mismo punto. La esfera de plomo se desvia de tal modo que se eleva hasta la altura H y se suelta. Después del choque esta esfera se eleva hasta la altura h. El choque es central. Determinar la cantidad de energía que se transforma en calor.

Resolución

Lógica

- La Energía Mecánica de un sistema es igual a la suma de su Energía Cinética y Energía Potencial.
- Cuando la Esfera 1 se alza, adquiere una cierta Energía Potencial, que, al no haber otro movimiento o acción, es igual a la Energía Mecánica al inicio del fenómeno.
- Al instante siguiente en el que se suelta la Esfera 1, empieza a caer, y, por lo tanto, adquiere una velocidad, la cual se incrementa conforme pasa el tiempo.
- Al caer, la Esfera 1 disminuye su altura, pero al mismo tiempo aumenta su velocidad; poniéndolo de otra manera, lo que pierde de Energía Potencial se transforma en Energía Cinética.
- Un instante antes de la colisión contra la Esfera 2, la Esfera 1 tendrá una altura = 0, y una cierta velocidad lo que significará que toda la Energía Potencial se habrá convertido en Energía Cinética.

- Después de chocar con la Esfera 2, la Esfera 1 se seguirá moviendo a una velocidad menor que su velocidad inicial, y la Esfera 2 comenzará a moverse con su propia velocidad.
- La Esfera 1 parará a una cierta altura , momento en el cual toda su Energía Potencial se habrá convertido, de nuevo, en Energía Cinética.
- Por otro lado, debido a que está en movimiento, la Esfera 2 tendrá una cierta Energía Cinética.
- La suma de la Energía Potencial de la Esfera 2 al momento de pararse, mas la Energía Cinética de la Esfera 1 un instante después de la colisión será igual a la Energía Mecánica final del sistema.
- Asumiendo que es una colisión inelástica, la Energía Mecánica Final será menor que la Energía Mecánica Inicial.
- Por lo tanto, para calcular cuánta energía se transformó en calor durante el choque, sólo hace falta obtener la diferencia entre la Energía Mecánica Inicial y la Final.

Aritmética

La magnitud de la energía transformada en calor será igual a la diferencia entre la Energía Mecánica inicial y la final:

$$Q = E_{m0} - E_{mf} \longrightarrow ①$$

En el Estado de Movimiento A (véase anexo) la Esfera 1 tiene una altura H, por lo tanto tendrá una Energía Potencial inicial igual a

$$E_{p0} = \frac{mgH}{4}$$

Esta también representa la Energía Mecánica Inicial del sistema:

$$E_{m0} = \frac{mgH}{4} \longrightarrow ②$$

En el Estado de Movimiento C, después del choque, la Esfera 1 tendrá una velocidad V_1, y la Esfera 2 una velocidad V_x. Por lo tanto, la Energía Mecánica total del sistema será igual a

$$E_{mf} = \frac{mV_1^2}{8} + \frac{mV_x^2}{2} \longrightarrow ③$$

Sustituimos ② y ③ en ①

$$Q = \frac{mgH}{4} - \frac{mV_1^2}{8} - \frac{mV_x^2}{2} \longrightarrow \textcircled{4}$$

En el Estado de Movimiento D, la Esfera 1 se detuvo a una altura h, lo que significa que toda su Energía Potencial se convirtió en Energía Cinética; representado aritméticamente

$$Ep = Ek$$

Tomando V_1 como la velocidad que adquirió un instante después del choque, tenemos que

$$\frac{mgh}{4} = \frac{m{V_1}^2}{8} \longrightarrow \textcircled{5}$$

Sustituimos ⑤ en ④

$$Q = \frac{mgH}{4} - \frac{mgh}{4} - \frac{mV_x^2}{2} \longrightarrow \textcircled{6}$$

En el Estado de Movimiento B, la Esfera 1 posee una velocidad V_0, por lo tanto la cantidad de movimiento inicial será igual a

$$p_0 = \frac{mV_0}{4}$$

En el estado de movimiento C, ambas Esferas poseen una velocidad, por lo tanto la cantidad de movimiento final será igual a

$$p_f = mV_x + \frac{mV_1}{4}$$

Como se conserva la cantidad de movimiento durante todo el experimento, tenemos que

$$p_0 = p_f$$

$$\frac{mV_0}{4} = mV_x + \frac{mV_1}{4}$$

Simplificando

$$\frac{\cancel{m}V_0}{4} = \cancel{m}(V_x + \frac{V_1}{4})$$

$$\frac{V_0}{4} = V_x + \frac{V_1}{4}$$

$$V_x = \frac{V_0 - V_1}{4} \longrightarrow \textcircled{7}$$

Como se ilustra en el Estado de Movimiento B, un instante antes del choque, toda la Energía Potencial que tenía la Esfera 1 pasó a convertirse en Energía Cinética; visto de manera algebraica, tenemos que

$$\frac{mgH}{4} = \frac{mV_0^2}{8}$$

Simplificando

$$\frac{\cancel{m}gH}{4} = \frac{\cancel{m}V_0^2}{8}$$

$$\frac{gH}{4} = \frac{V_0^2}{8}$$

$$gH = \frac{V_0^2}{2}$$

$$V_0^2 = 2gH$$

$$V_0 = \sqrt{2gH} \longrightarrow \textcircled{8}$$

Se hace lo mismo con el Estado de Movimiento D, con la diferencia que, en este caso, es la Energía Cinética la que se convierte en Energía Potencial, al detenerse la esfera a una altura h

$$mgh = \frac{mV_x^2}{2}$$

Simplificando

$$\cancel{m}gh = \frac{\cancel{m}V_1^2}{2}$$

$$gh = \frac{V_1^2}{2}$$

$$2gh = V_1^2$$

$$V_1 = \sqrt{2gh} \longrightarrow \textcircled{9}$$

Sustituimos $\textcircled{8}$ y $\textcircled{9}$ en $\textcircled{7}$

$$V_x = \frac{\sqrt{2gH} - \sqrt{2gh}}{4} \longrightarrow \textcircled{10}$$

Sustituimos ⑩ en ⑥

$$Q = \frac{mgH}{4} - \frac{mgh}{4} - \frac{m\left(\frac{\sqrt{2gH}-\sqrt{2gh}}{4}\right)^2}{2}$$

Simplificamos

$$Q = m\left(\frac{gH}{4} - \frac{gh}{4} - \frac{\left(\frac{\sqrt{2gH}-\sqrt{2gh}}{4}\right)^2}{2}\right)$$

$$Q = m\left(\frac{gH}{4} - \frac{gh}{4} - \frac{\frac{2gH-2\sqrt{2gH}\sqrt{2gh}+2gh}{16}}{2}\right)$$

$$Q = m\left(\frac{gH}{4} - \frac{gh}{4} - \frac{\frac{2gH-2\sqrt{2gH2gh}+2gh}{16}}{2}\right)$$

$$Q = m\left(\frac{gH}{4} - \frac{gh}{4} - \frac{\frac{2gH-2\sqrt{4g^2Hh}+2gh}{16}}{2}\right)$$

$$Q = m\left(\frac{gH}{4} - \frac{gh}{4} - \frac{\frac{2gH-2(2g)\sqrt{Hh}+2gh}{16}}{2}\right)$$

$$Q = m\left(\frac{gH}{4} - \frac{gh}{4} - \frac{\frac{2gH-4g\sqrt{Hh}+2gh}{16}}{2}\right)$$

$$Q = m\left(\frac{gH}{4} - \frac{gh}{4} - \frac{2gH-4g\sqrt{Hh}+2gh}{32}\right)$$

$$Q = m\left(\frac{gH}{4} - \frac{gh}{4} - \frac{2g(H-2\sqrt{Hh}+h)}{32}\right)$$

$$Q = m\left(\frac{gH}{4} - \frac{gh}{4} - \frac{g(H-2\sqrt{Hh}+h)}{16}\right)$$

$$Q = mg\left(\frac{H}{4} - \frac{h}{4} - \frac{H-2\sqrt{Hh}+h}{16}\right)$$

$$Q = mg\left(\frac{4H}{16} - \frac{4h}{16} - \frac{H - 2\sqrt{Hh} + h}{16}\right)$$

$$Q = mg\left(\frac{4H - 4h - (H - 2\sqrt{Hh} + h)}{16}\right)$$

$$Q = mg\left(\frac{4H - 4h - H + 2\sqrt{Hh} - h}{16}\right)$$

$$Q = mg\left(\frac{3H - 5h + 2\sqrt{Hh}}{16}\right)$$

$$Q = \frac{1}{16}mg(3H - 5h + 2\sqrt{Hh})$$

Anexos

